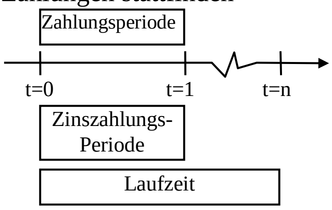
Annuitäten

Autor: Felix Heckert

Annuity-certain: Reihe von Zahlungen, die periodisch über eine bestimmte Laufzeit gemacht werden ("certain", da die Zahlungen sicher stattfinden)

Zahlungsperiode: Zeitfrequenz der Zahlungen

Laufzeit (der Annuität): Laufzeit, über die die Zahlungen stattfinden



Klassifizierung:

a) Zahlungen mit fixer / variabler Höhe
b) Zahlung am Anfang / Ende einer jeden Periode
c) Laufzeit = endlich / unendlich
d) Zahlungsperiode = Zinsperiode / Zahlungsperiode ≠ Zinsperiode

Annuity-immediate: Annuität mit Zahlungen fixer Höhe am Ende jeder Zahlungsperiode

Annuity-due: Annuität mit Zahlungen fixer Höhe am Anfang jeder Zahlungsperiode

Ewige Rente (= Perpetuity): Annuität mit unendlicher Laufzeit, n = ∞

$a_{\overline{\infty}\mid i} = \frac{1}{i}$; $\ddot{a}_{\overline{\infty}\mid i} = \frac{1}{d}$	$s_{\overline{\infty}\mid i} = \infty = \ddot{s}_{\overline{\infty}\mid i}$ ⇒ ergibt keinen Sinn!

Deferred annuity:	**Current value:**
Annuität, dessen erste Zahlung m Perioden in der Zukunft startet $_{m\mid}a_{\overline{n}\mid i} = v^m \cdot a_{\overline{n}\mid i}$ $_{m\mid}\ddot{a}_{\overline{n}\mid i} = v^m \cdot \ddot{a}_{\overline{n}\mid i}$ $_{m\mid}s_{\overline{n}\mid i} = s_{\overline{n}\mid i} \cdot (1+i)^m$ $_{m\mid}\ddot{s}_{\overline{n}\mid i} = \ddot{s}_{\overline{n}\mid i} \cdot (1+i)^m$	$AV(t=m) = s_{\overline{m}\mid i} + a_{\overline{n}\mid i}$ oder $AV(t=m) = \ddot{s}_{\overline{m}\mid i} + \ddot{a}_{\overline{n}\mid i}$

Berechnung des Barwerts (PV) und des Endwerts (FV):

Wert=Zahlung · Akkumulationsfaktor

Annuity-immediate	Annuity-due
$a_{\overline{n}\mid i} = \frac{1-v^n}{i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ $s_{\overline{n}\mid i} = a_{\overline{n}\mid i} \cdot (1+i)^n = \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{v^{-n}-1}{i}$	$\ddot{a}_{\overline{n}\mid i} = \frac{1-v^n}{d} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{d} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \cdot (1+i)$ $\ddot{s}_{\overline{n}\mid i} = \frac{(1+i)^n - 1}{d} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \cdot (1+i)$

Ein höheres i bedeutet: höherer FV und niedrigerer PV

Überblick über Akkumulationsfaktoren

a/s	PV/FV	immediate /due	Zeitschritt	Zinsperiode / Zahlungsperiode
$a_{\overline{n}\mid i}$	PV	immediate	1	Die Zinsperiode entspricht der Zahlungsperiode
$s_{\overline{n}\mid i}$	FV	immediate	1	Die Zinsperiode entspricht der Zahlungsperiode
$\ddot{a}_{\overline{n}\mid i}$	PV	due	1	Die Zinsperiode entspricht der Zahlungsperiode
$\ddot{s}_{\overline{n}\mid i}$	FV	due	1	Die Zinsperiode entspricht der Zahlungsperiode
$a^{(m)}_{\overline{n}\mid i}$	PV	immediate	1/m	Am Ende jeder 1/m-ten Zinsperiode für n Zinsperioden
$s^{(m)}_{\overline{n}\mid i}$	FV	immediate	1/m	Am Ende jeder 1/m-ten Zinsperiode für n Zinsperioden
$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}\mid i}$	PV	due	1/m	Am Anfang jeder 1/m-ten Zinsperiode für n Zinsperioden
$\ddot{s}^{(m)}_{\overline{n}\mid i}$	FV	due	1/m	Am Anfang jeder 1/m-ten Zinsperiode für n Zinsperioden

Zahlungsperiode > Zinsperiode Annuitäten mit Zahlungen gleicher Höhe, wenn Zahlungsperiode größer als Zinsperiode ist		**Zahlungsperiode < Zinsperiode** Annuitäten mit Zahlungen gleicher Höhe, wenn Zahlungsperiode kürzer als Zinsperiode ist	
Annuity-immediate	**Annuity-due**	**Annuity-immediate**	**Annuity-due**
$PV = \frac{a_{\overline{n}\|i}}{s_{\overline{k}\|i}}$ (… ist auch der PV einer Annuität mit einer Zahlung von $1/s_{\overline{k}\|i}$ am Ende jeder Periode bei Zahlungsperiode gleich Zinsperiode)	$PV = \frac{a_{\overline{n}\|i}}{a_{\overline{k}\|i}}$ (… ist auch der PV einer Annuität mit einer Zahlung von $1/a_{\overline{k}\|i}$ am Ende jeder Periode bei Zahlungsperiode gleich Zinsperiode)	$a^{(m)}_{\overline{n}\|i} = \frac{1-v^n}{i^{(m)}} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i^{(m)}}$ $s^{(m)}_{\overline{n}\|i} = \frac{(1+i)^n-1}{i^{(m)}}$	$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}\|i} = \frac{1-v^n}{d^{(m)}} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{d^{(m)}}$ $\ddot{s}^{(m)}_{\overline{n}\|i} = \frac{(1+i)^n-1}{d^{(m)}}$ $\ddot{s}^{(m)}_{\overline{n}\|i} = \frac{(1+i^{(1)})^n-1}{i^{(m)}} \cdot \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)$
Ewige Renten (Perpetuities)			
$PV = \frac{1}{i \cdot s_{\overline{k}\|i}}$ (= PV einer ewigen Rente mit Zahlungen in Höhe von 1 am Ende jeder k-ten Zinsperiode)	$PV = \frac{1}{i \cdot a_{\overline{k}\|i}} = \frac{a_{\overline{\infty}\|i}}{a_{\overline{k}\|i}}$ (= PV einer ewigen Rente mit Zahlungen in Höhe von 1 am Anfang jeder k-ten Zinsperiode)	$a^{(m)}_{\overline{\infty}\|i} = \frac{1}{i^{(m)}}$ (… ist der PV einer ewigen Rente, die 1/m am Ende von jeder 1/m-ten Zinsperiode zahlt)	$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty}\|i} = \frac{1}{d^{(m)}}$ (… ist der PV einer ewigen Rente, die 1/m am Anfang jeder 1/m-ten Zinsperiode zahlt)
k: Anzahl von Zinsperioden in jeder Zahlungsperiode m: Gesamtanzahl an Zahlungen n: Laufzeit der Annuität (gemessen in Zinsperioden)		m: Anzahl von Zahlungen pro Zinsperiode n: Anzahl an Zinsperioden i: Effektiver Zinssatz pro Zinsperiode $i^{(m)}$: Äquivalenter nominaler Zins, zahlbar m-fach pro Zinsperiode	

Kontinuierliche Annuität / Ewige Rente (= Perpetuity)

Barwert (= Present Value)	**Endwert (= Future Value)**
$\bar{a}_{\overline{n}\|i}$: PV einer Annuität, in der Zahlungen kontinuierlich für n Zinsperioden gemacht werden, sodass der Betrag, der in jeder Zinsperiode gezahlt wird, 1 ist	$\bar{s}_{\overline{n}\|i}$: FV (= akkumulierter Wert) einer Annuität, in der Zahlungen kontinuierlich für n Zinsperioden gemacht werden, sodass der Betrag, der in jeder Zinsperiode gezahlt wird, 1 ist
$\bar{a}_{\overline{n}\|i} = \lim_{m\to\infty} a^{(m)}_{\overline{n}\|i} = \lim_{m\to\infty} \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}\|i}$ $= \int_0^n v^t dt = \frac{1-v^n}{\delta} = \frac{1-e^{-n\delta}}{\delta}$ $v^t dt$: PV der Zahlung dt, gemacht exakt zum Zeitpunkt t	$\bar{s}_{\overline{n}\|i} = \lim_{m\to\infty} s^{(m)}_{\overline{n}\|i} = \lim_{m\to\infty} \ddot{s}^{(m)}_{\overline{n}\|i}$ $= \int_0^n (1+i)^{n-t} dt = \frac{(1+i)^n-1}{\delta} = \frac{e^{n\delta}-1}{\delta}$

Annuitäten mit Zahlungen variabler Höhe

Arithmetische Annuität

Die Annuitäts-Zahlung ist P und der jährliche Zuwachs ist Q. Dann kann die Jahreszahlung, TAP (= total annual payment), im Jahr t wie folgt geschrieben werden:

$$TAP_t = P + (t-1) \cdot Q$$

Die jährliche Änderung der Zahlung (Q) kann positiv oder negativ sein.

Annuität (Annuity)		Ewige Rente (Perpetuity)	
Arithmetic annuity-immediate	**Arithmetic annuity-due**	**Arithmetic perpetuity-immediate**	**Arithmetic perpetuity-due**
Zahlungen werden am Ende jeder Zahlungsperiode für n Zahlungsperioden gemacht	Zahlungen werden am Anfang jeder Zahlungsperiode für n Zahlungsperioden gemacht	Zahlungen werden am Ende jeder Zahlungsperiode gemacht	Zahlungen werden am Anfang jeder Zahlungsperiode gemacht
$PV = P \cdot a_{\overline{n}\vert i} + Q \cdot \frac{a_{\overline{n}\vert i} - n \cdot v^n}{i}$ $FV = P \cdot s_{\overline{n}\vert i} + Q \cdot \frac{s_{\overline{n}\vert i} - n}{i}$	$PV = \left(P \cdot a_{\overline{n}\vert i} + Q \cdot \frac{a_{\overline{n}\vert i} - n \cdot v^n}{i}\right) \cdot (1+i)$ $FV = \left(P \cdot s_{\overline{n}\vert i} + Q \cdot \frac{s_{\overline{n}\vert i} - n}{i}\right) \cdot (1+i)$	$PV = \frac{P}{i} + \frac{Q}{i^2}$ FV ergibt keinen Sinn	$PV = \left(\frac{P}{i} + \frac{Q}{i^2}\right) \cdot (1+i)$ FV ergibt keinen Sinn

Spezialfall: erste Zahlung ist 1 und die Zahlungen erhöhen sich um 1 in jeder Periode: P = 1, Q = 1	Spezialfall: erste Zahlung ist n und Zahlungen verringern sich um 1 in jeder Periode: P = n, Q = –1
$PV = (Ia)_{\overline{n}\vert i} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}\vert i} - n \cdot v^n}{i}$ $(Ia)_{\overline{\infty}\vert i} = \frac{1+i}{i^2}$ $FV = (Is)_{\overline{n}\vert i} = \frac{\ddot{s}_{\overline{n}\vert i} - n}{i}$	$PV = (Da)_{\overline{n}\vert i} = \frac{n - a_{\overline{n}\vert i}}{i}$ $FV = (Ds)_{\overline{n}\vert i} = \frac{n \cdot (1+i)^n - s_{\overline{n}\vert i}}{i}$

Geometrische Annuität

Zahlungsperiode gleicht der Zinsperiode

Die Zahlung ist P und der jährliche Zuwachs in Prozent ist r. Dann kann die jährliche Zahlung in Jahr t, TAP (= total annual payment), wie folgt geschrieben werden:

$$TAP_t = (1+r)^{n-1}$$

Die jährliche Änderung r der Zahlung kann positiv oder negativ sein.

Annuität (Annuity)		Ewige Rente (Perpetuity)	
Geometric annuity-immediate	**Geometric annuity-due**	**Geometric perpetuity-immediate**	**Geometric perpetuity-due**
Zahlungen werden am Ende jeder Zahlungsperiode gemacht für n Zahlungsperioden	Zahlungen werden am Anfang jeder Zahlungsperiode gemacht für n Zahlungsperioden	Zahlungen werden am Ende jeder Zahlungsperiode gemacht	Zahlungen werden am Anfang jeder Zahlungsperiode gemacht
$a^r_{\overline{n}\vert i} = \frac{1 - \left(\frac{1+r}{1+i}\right)^n}{i-r}$ $s^r_{\overline{n}\vert i} = \frac{(1+i)^n - (1+r)^n}{i-r}$	$\ddot{a}^r_{\overline{n}\vert i} = \frac{1 - \left(\frac{1+r}{1+i}\right)^n}{d - v \cdot r}$ $\ddot{s}^r_{\overline{n}\vert i} = \frac{(1+i)^n - (1+r)^n}{d - v \cdot r}$	$a^r_{\overline{\infty}\vert i} = \frac{1}{i-r}$ FV ergibt keinen Sinn	$\ddot{a}^r_{\overline{\infty}\vert i} = \frac{1}{d - v \cdot r} = \frac{1}{i-r} \cdot (1+i)$ FV ergibt keinen Sinn